

Teorijska pitanja:

P1. Odnos termičkih disipacija na dva paralelno vezana otpornika R_1 i R_2 je $P_1/P_2 = 3/1$. Nacrtati šemu veze [1] i odrediti odnos napona [2] i odnos struja kroz ove otpornike [2]?

P2. Nacrtati sliku [1], obeležiti sve potrebne veličine [1] i izvesti izraz za raspodelu vektora \mathbf{E} unutar i oko homogeno zapreminski naelektrisanе sfere poluprečnika R u vakuumu [3]. Zapreminska gustina naelektrisanja sfere je ρ .

P3. Odrediti podužnu silu [3] između dva dugačka, tanka, paralelna pravolinijska provodnika sa vremenski stalnom strujom jačine

I koji se nalaze u vazduhu na međusobnom rastojanju od $1/(2\pi)[m]$. Kada je ova sila privlačna, a kada odbojna [2] ?

P4. Impedansu \bar{Z} formira paralelna veza otpornika i kondenzatora. Prikazati šematski ovu impedansu [1]. Pokazati kako se menjaju moduo i argument [1+1] ove impedanse sa porastom frekvencije. Koliko iznosi moduo ove impedanse kada kružna frekvencija $\omega \rightarrow \infty$ [1], a koliko kada $\omega \rightarrow 0$ [1]? Odogovor bez obrazloženja se ne boduje.

Zadaci:

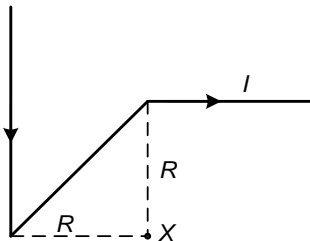
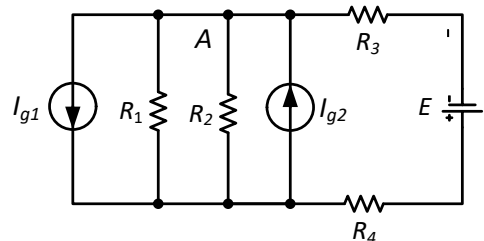
Z1. Pločasti kondenzator ispunjen je sa dva homogena, linearna dielektrika relativnih permitivnosti 3 i 5, respektivno. Razdvojna površina između dielektrika je normalna na obloge i nalazi se na sredini kondenzatora. Površina obloga je 40cm^2 , a rastojanje između njih 2mm. Naelektrisanja ploča kondenzatora su $\pm 2\text{nC}$. Obavezno nacrtati sliku (rešenje bez slike se ne boduje). Odrediti:

- Vektor jačine električnog polja [2] u kondenzatoru i napon [2] između elektroda.
- Kapacitivnost [2] i energiju [2] ovog kondenzatora

Z2. Za kolo sa šeme desno odrediti:

- snagu Džulovih gubitaka na otporniku R_1 [2],
- uloženu snagu svakog generatora pojedinačno [2+2+2]?

Podaci: $I_{g1}=4[\text{mA}]$, $E=12[\text{V}]$, $I_{g2}=12[\text{mA}]$, $R_1=R_2=12[\text{k}\Omega]$, $R_3=2[\text{k}\Omega]$ i $R_4=4[\text{k}\Omega]$.



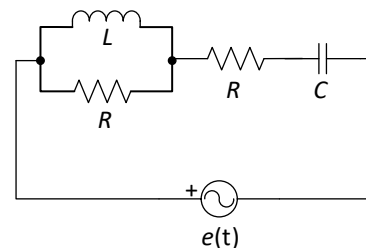
Z3. Odrediti vektor magnetske indukcije \mathbf{B} [6] u tački X koja leži u ravni tankog, neograničenog provodnika sa vremenski konstantnom strujom $I=1[\text{A}]$, u položaju kao na slici

Podaci: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}[\text{H/m}]$ i $R=2[\text{cm}]$.

Z4. U mreži na slici vlada ustaljeni sinusni režim. Odrediti:

- trenutnu vrednost struje izvora [4],
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu mreže [3],
- fazni stav između napona i struje izvora [1].

Podaci: $e(t)=\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 \cdot t)[\text{V}]$, $R=1[\Omega]$, $L=1[\text{mH}]$ i $C=2[\text{mF}]$.



P1. Zbog paralelne veze napon je isti na oba otpornika. $P_1 / P_2 = (U^2 / R_1) / (U^2 R_2) = R_2 / R_1 = 3 / 1$.
 $I_1 / I_2 = (U / R_1) / (U / R_2) = R_2 / R_1 = 3 / 1$.

P2. $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$, $r \leq R$ i $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$, $r > R$

P3. $d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1$, $F'_{12} = dF_{12} / dl_2 = I_2 \cdot B_1$, Kako je $I_1 = I_2 = I$, a $B_1 = \mu_0 \frac{I}{2\pi \cdot 1/2\pi} = \mu_0 \cdot I$ to je
 podužna sila $F'_{12} = I \cdot B_1 = \mu_0 I^2$. Sila je privlačna ako su struje istog smera, a odbojna u suprotnom.

P4. $\bar{Z} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{R}{1 + j\omega CR} = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2} \cdot e^{j \arctg(\omega CR)}} = Z \cdot e^{j\varphi}$.

$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}$, $\varphi = -\arctg(\omega CR)$. Sa porastom frekvencije moduo i argument impedanse

opadaju. Kada $\omega \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow 0$, a kada $\omega \rightarrow 0$, $Z \rightarrow R$.

Z1. Razdvojna površina normalna na ploče kondenzatora, onda je vektor jačine polja tangencijalan na razdvojnu površinu. Iz drugog graničnog uslova sledi: $\mathbf{E}_{1tg} = \mathbf{E}_{2tg} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$,

$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} \mathbf{E}$ i $\mathbf{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} \mathbf{E} \cdot \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q_1$,

$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_{S/2} \mathbf{D}_1 d\mathbf{S} + \int_{S/2} \mathbf{D}_2 d\mathbf{S} = D_1 S / 2 + D_2 S / 2 = Q_1$.

$D_1 S / 2 + D_2 S / 2 = \epsilon_0 \epsilon_{r1} E \cdot S / 2 + \epsilon_0 \epsilon_{r2} E \cdot S / 2 = \epsilon_0 S / 2 \cdot (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) E = Q_1$,

$E = \frac{Q_1}{\epsilon_0 \cdot S / 2 \cdot (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(10^{-9} / 36\pi) \cdot (40 \cdot 10^{-4} / 2) \cdot (3 + 5)} = 14.14 [\text{KV/m}]$.

$U = E \cdot d = 14.14 \cdot 10^3 [\text{V/m}] \cdot 2 \cdot 10^{-3} [\text{m}] = 28.28 [\text{V}]$

$C = Q_1 / U = \epsilon_0 \epsilon_{r1} (S/2) / d + \epsilon_0 \epsilon_{r2} (S/2) / d = 70.7 [\text{pF}]$

$W_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \cdot 70.7 \cdot 10^{-12} \cdot 28.28^2 = 28.28 [\text{nJ}]$

Z2. Metodom potencijala čvorova sledi,

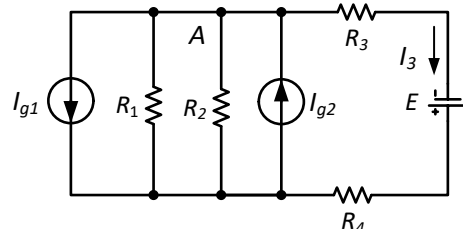
$(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}) V_A = -I_{g1} + I_{g2} - \frac{E}{R_3 + R_4}$
 $(\frac{10^{-3}}{12} + \frac{10^{-3}}{12} + \frac{10^{-3}}{2+4}) V_A = -4 \cdot 10^{-3} + 12 \cdot 10^{-3} - 12 \frac{10^{-3}}{2+4}$
 $\frac{2}{6} V_A = 6 \Rightarrow V_A = 18 [\text{V}]$.

$I_3 = \frac{V_A + E}{R_3 + R_4} = \frac{18 + 12}{6 \cdot 10^3} = 5 [\text{mA}]$ sa označenim smerom.

a) $P_{R1} = \frac{V_A^2}{R_1} = \frac{18^2}{12 \cdot 10^3} = 27 [\text{mW}]$

b) $P_{I_{g1}} = -V_A \cdot I_{g1} = -18 \text{V} \cdot 4 \text{mA} = -72 [\text{mW}]$, $P_{I_{g2}} = V_A \cdot I_{g2} = 18 \text{V} \cdot 12 \text{mA} = 216 [\text{mW}]$,

$P_E = E \cdot I_3 = 12 \text{V} \cdot 5 \text{mA} = 60 [\text{mW}]$

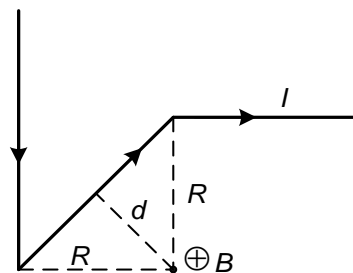


Z3. S leva u desno, u smeru toka struje, postoje 3 segmenta:

$$B_1 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin 0 - \sin(-\pi/2)] = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R},$$

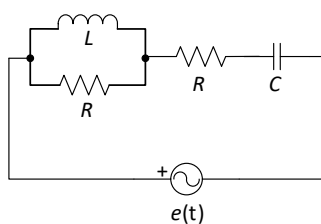
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi d} [\sin(\pi/4) - \sin(-\pi/4)]$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi(R\sqrt{2})/2} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\pi/2) - \sin 0] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \text{ u odnosu na referentni smer } \otimes \text{ u tački X. Dakle}$$

$$B_r = B_1 + B_2 + B_3 = B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 10^{-5} [\text{T}] = 10 [\mu\text{T}]$$



Z4. Ukupna impedansa kola je

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_L \cdot R}{\bar{Z}_L + R} + \bar{Z}_C + R = \frac{j\omega L \cdot R}{j\omega L + R} + \frac{1}{j\omega C} + R.$$

Nakon sređivanja sledi:

$$\bar{Z} = \frac{j\omega L \cdot R}{j\omega L + R} + \frac{1}{j\omega C} + R = \frac{j10^3 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{j10^3 \cdot 10^{-3} + 1} - j \frac{1}{10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} + 1$$

$$\bar{Z} = \frac{j}{j+1} - j \frac{1}{2} + 1 = \frac{j}{j+1} \frac{j-1}{j-1} - j \frac{1}{2} + 1 = \frac{j^2 - j}{j^2 - 1} - j \frac{1}{2} + 1 = \frac{-1-j}{-2} - j \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+j}{2} - j \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \Omega.$$

a) Dakle, struja izvora je $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}} = \frac{1[\text{V}]}{\frac{3}{2}[\Omega]} = \frac{2}{3}[\text{A}]$, pa je $i(t) = (2/3)\sqrt{2} \cdot \sin(10^3 \cdot t)[\text{A}]$.

b) $\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = 1 \cdot \frac{2}{3}[\text{VA}] \Rightarrow P = \frac{2}{3}[\text{W}], Q = 0[\text{VAr}], S = \frac{2}{3}[\text{VA}].$

c) Napon i struja izvora su u fazi.